Le symbole désigne un exercice demandant un peu plus de calculs.
Le symbole ↯ désigne un exercice utilisant des idées/méthodes plus originales.
Les exercice «Associations de ressorts» et suivants sont plutôt des exercices de mécanique mettant en œuvre des techniques qu'on reverra dans la partie «Mécanique du cours»
Les frottements seront négligés, sauf mention explicite du contraire.

Exercices d'application : Ressort horizontal, questions courtes, utilisation de l'énergie, différents paramétrages, bille accrochée, exploitation de mesures,

Culture en sciences physiques : Questions courtes, bille accrochée, associations de ressorts, battements

Corrigés en TD : Ressort horizontal, bille accrochée, exploitation de mesures, utilisation de l'énergie

Construction de Fresnel

Exercice 1 : Représentation de Fresnel

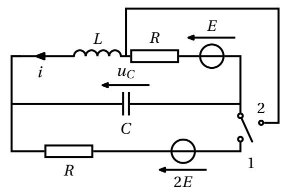
Déterminer graphiquement l'amplitude et la phase des sinusoïdes suivantes :

1. $\cos(\omega t)+\cos(\omega t+\pi)$,
2. $\cos(\omega t)+2\sin(\omega t)$,
3. $\cos(\omega t)+3\cos(\omega t+\pi/4)$.

Circuit LC

Exercice 2 : Oscillations dans un circuit LC

On considère le circuit de la figure ci-contre dans lequel le condensateur et la bobine sont idéaux. L'interrupteur est initialement en position 1 et est placé en position 2 à l'instant $t=0$.



1. Déterminer les expressions de u_C et de i quand l'interrupteur est en position 1 depuis longtemps (on précisera les deux conditions nécessaires).
2. Déterminer l'expression de $u_C(t)$après qu'on a basculé l'interrupteur en position 2. On précisera son amplitude et les instants auxquels elle atteint son maximum. On a $E=10\,\mathrm{V}$, $R=5{,}0\cdot 10^2\,\Omega$, $C=20\,\mathrm{nF}$. Pour quelle valeur de L observera-t-on des oscillations de u_C d'amplitude $U_{c,m}=13\,\mathrm{V}$? À quel(s) instant(s) aura-t-on $u_c=U_m$?

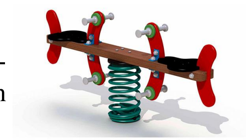
Oscillateur harmonique

Exercice 3 : Ressort horizontal

1. Représenter un système masse-ressort horizontal :
   - quand son élongation est maximale,
   - un quart de période plus tard,
   - une demi-période plus tard.
2. Représenter également par des vecteurs la force de tension sur l'extrémité mobile et le vecteur vitesse de ce point à chacun de ces instants.
3. Si l'élongation du ressort est maximale (notée $\Delta l_{\max}$) à $t=0$, donner une expression de son élongation en fonction du temps.

Exercice 4 : Questions courtes

1. On comprime un ressort horizontal d'une élongation Δl donnée. On y attache un objet qu'on lâche sans vitesse initiale. Comment varient la vitesse maximale et l'élongation maximale atteintes par l'objet en fonction de sa masse ?
2. Comment se peser dans l'espace avec un ressort ?
3. Comment évoluent les oscillations des amortisseurs d'une bascule à ressort comme celle représentée ci-contre selon qu'un adulte ou un enfant l'utilise ?



Exercice 5 : Utilisation de l'énergie

1. On considère un système masse-ressort horizontal, caractérisé par une longueur à vide ℓ_0, une raideur k et une masse m. Il est initialement étiré d'une longueur $\Delta\ell_0 > 0$ par rapport à longueur à vide et abandonné sans vitesse initiale. On noté ℓ sa longueur et $\Delta\ell$ son élongation.

   (a) Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par ℓ. En déduire l'expression de $\Delta\ell(t)$ et vérifier le résultat classique.

   (b) En déduire les expressions des énergie cinétique, potentielle et mécanique en fonction du temps. Vérifier la conservation de l'énergie. Montrer qu'on peut ainsi retrouver directement la longueur minimale du ressort au cours de son mouvement, sans utiliser les expressions explicites de ℓ en fonction du temps.

2. Mêmes questions si le système masse-ressort est vertical, dans le champ de pesanteur d'accélération notée g.

Exercice 6 : Différents paramétrages

On considère un ressort horizontal de raideur k et de longueur à vide l_0 dont une extrémité est fixée en un point A. On fixe une masse m à l'autre extrémité M. Le ressort est comprimé à l'instant $t = 0$ d'une longueur $\Delta l_0 > 0$. On note M_0 cette position.

Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la position du point M en utilisant différentes coordonnées et différentes conditions initiales sur le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$.

- $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{0}$, origine au point A, axe dirigé par $\overrightarrow{AM_0}$.
- vitesse de norme $v_0 > 0$ dirigée en sens inverse de A ; origine au point O, défini par la position du point M quand le ressort a sa longueur au repos, axe dirigé par $\overrightarrow{M_0A}$.
- $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{0}$, origine en M_0, axe dirigé par $\overrightarrow{AM_0}$.

Exercice 7 : Bille accrochée à un ressort vertical

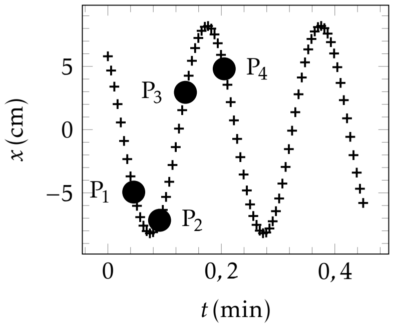
Un ressort vertical s'allonge de 5,0 cm par rapport à sa longueur au repos quand on suspend à son extrémité libre une bille de 200 g. On cogne la bille lorsqu'elle est à l'équilibre, verticalement et vers le haut. Elle remonte alors de 2,0 cm avant de redescendre. On néglige le frottement de l'air et on prendra $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Déterminer :

- la raideur du ressort,
- la période T et la fréquence de ses oscillations,
- l'expression du déplacement $z(t)$ par rapport à la position d'équilibre,
- le module de la vitesse initiale communiquée à la bille lors du choc.

Exercice 8 : Exploitation de mesures

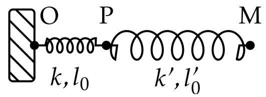
Un dispositif a réalisé l'acquisition de l'allongement d'un ressort au cours du temps. Les résultats sont présentés graphiquement dans la figure ci-dessous.



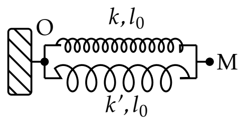
1. On cherche à exprimer l'allongement sous la forme $x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \varphi)$. Déterminer graphiquement les valeurs numériques de A, f_0 et φ.
2. Représenter le système masse-ressort aux instants correspondant aux points P_1, P_2, P_3 et P_4. Représenter qualitativement les vecteurs vitesse et accélération.
3. La masse de l'objet accrochée au ressort vaut $m = 100\,\mathrm{g}$. En déduire la raideur du ressort.

Exercice 9 : Associations de ressorts

1. On considère deux ressorts de constantes de raideur respectives k et k' et de longueurs à vide respectives l'_O et l'_0 associés en série comme représenté ci-contre. Montrer qu'ils sont équivalents à un unique ressort idéal dont on donnera la longueur à vide et la constante de raideur.

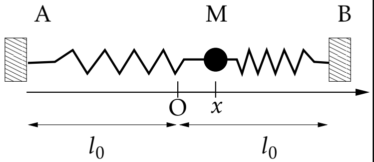


2. On considère maintenant deux ressorts de constantes de raideur respectives k et k' et de même longueur à vide respectives l_O associés en parallèle comme représenté ci-contre : leurs extrémités sont toujours jointes. Montrer qu'ils sont équivalents à un unique ressort idéal dont on donnera la longueur à vide et la constante de raideur.



Exercice 10 : Point matériel lié à deux ressorts

Ressorts horizontaux

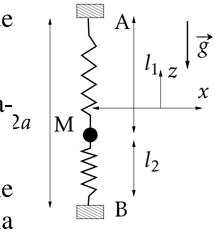


Un point matériel de masse m est attaché à deux ressorts horizontaux identiques (longueur au repos l_0, constante de raideur k) fixés aux points A et B, fixes dans $\mathscr{R}_T$.

Le point est à l'instant t au point M d'abscisse $\overline{OM} = x$ à l'instant t et glisse sans frottement le long de l'axe Ox.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement du point M. Y identifier la pulsation caractéristique du système ω_0.
2. À l'instant initial, le mobile est immobile en M_0 tel que $\overline{OM_0} = x_0$. Exprimer x en fonction de t.
3. Déterminer les forces exercées sur les supports en A et B. Où se trouve le point matériel quand ces forces sont maximales ?
4. Vérifier la conservation de l'énergie mécanique.

Ressorts verticaux
Les ressorts sont maintenant verticaux.

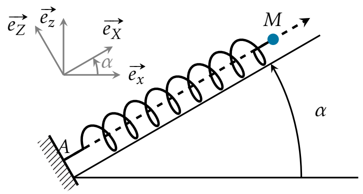


1. Calculer à l'équilibre les longueurs l_1 et l_2 des ressorts en fonction de m, g, k et a.
2. Établir l'équation différentielle d'évolution de z et en déduire la pulsation caractéristique.
3. À l'instant initial le point matériel se trouve en $z = 0$ animé d'une vitesse v_0 dirigée selon $\vec{e}_z$. Établir l'expression de $z(t)$ et vérifier la conservation de l'énergie.

Exercice 11 : Ressort sur un plan incliné

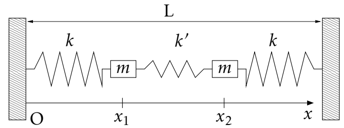
On place un système masse-ressort sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le vecteur vitesse initial est ici nul et le ressort est initialement allongé d'une longueur Δl_0.

Déterminer le mouvement ultérieur en utilisant :



1. les coordonnées X et Z d'origine A et de vecteurs de base $\vec{e_X}$ et $\vec{e_Z}$.
2. les coordonnées x et z de même origine et de vecteurs de base $\vec{e_x}$ et $\vec{e_z}$,

Exercice 12 : Battements entre oscillateurs faiblement couplés



On se propose de comprendre la nature du mouvement du système de deux points matériels représenté sur la figure ci-contre lorsque le point matériel 1 est écarté de sa position d'équilibre d'une distance a (le point 2 est maintenu immobile) puis relâché sans vitesse.
Les points matériels ont même masse m, les trois ressorts on même longueur à vide l_0 mais le ressort central a une raideur k' différente de la raideur k commune des deux ressorts extrémaux. Le mouvement de chaque masse est unidimensionnel selon l'axe Ox.

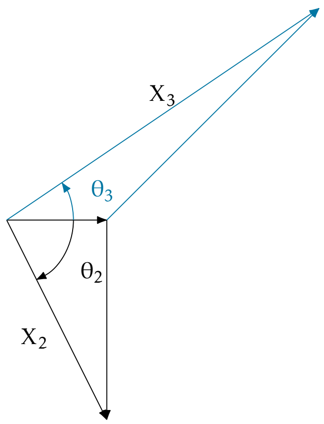
1. Déterminer les positions d'équilibres $x_{1(eq)}$ et $x_{2(eq)}$ de chacun des points matériels. On introduira les facteurs sans dimension : $\beta = l_0/L$ et $\alpha = k'/k$.
2. Déterminer les équations différentielles satisfaites par les écarts à l'équilibre $X_1 = x_1 - x_{1(\mathrm{eq})}$ et $X_2 = x_2 - x_{2(\mathrm{eq})}$.
3. Afin de découpler les deux équations, on pose $X_S = X_1 + X_2$ et $X_A = X_1 - X_2$.
   (a) Quelles sont les équations différentielles vérifiées par ces nouvelles variables ?
   (b) Les résoudre en introduisant deux pulsations ω_S et ω_- exprimées en fonction des paramètres du problème.
4. En déduire les équations horaires de x_1 et x_2.
5. On se place maintenant dans le cas où le ressort central est nettement moins raide que les deux autres : le problème est alors celui de deux oscillateurs pratiquement indépendants, faiblement couplés par le ressort central.
   (a) Que peut-on dire des pulsations ω_+ et ω_- ?
   (b) Tracer qualitativement les quantités $x_1(t)$ et $x_2(t)$ (utiliser les développements de $\cos a + \cos b$ et $\cos a - \cos b$).
   (c) Calculer l'énergie contenue dans chaque oscillateur et tracer les graphes de leur variation en fonction du temps. Montrer en particulier que l'énergie passe successivement d'un oscillateur à l'autre. Ce phénomène porte le nom de *battements*.

Correction de l'exercice 1

1. Le premier cas est une onde d'amplitude nulle,
2. Pour le deuxième, on peut écrire :

$$\cos(\omega t) + 2\sin(\omega t) = \cos(\omega t) + 2\cos(\omega t - \pi/2).$$

Le théorème de Pythagore donne une amplitude $X_2 = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$; et on lit $\tan(\theta_2) = -2$ soit, puisque $\cos(\theta_2) > 0$, $\theta_2 = \arctan(-2) = -63°$.



3. Dans ce cas, le théorème d'Al-Kashi donne :

$$X_3 = \sqrt{1+3^2+2\times3\times\cos(\pi/4)} = 3{,}8.$$

On détermine l'angle avec la formule des sinus :

$$\frac{\sin(\theta_3)}{3} = \frac{\sin(\pi-\pi/4)}{X_3} \to \sin(\theta_3) = 0{,}558,$$

soit, puisque $\theta_3 \in [0;\pi/2]$, $\theta_3 = \arcsin(0{,}558) = 33°$.

Correction de l'exercice 2

1. En régime stationnaire, le condensateur (resp. la bobine) est équivalent à un interrupteur ouvert (resp. fermé). On en déduit immédiatement, quand l'interrupteur est en position 1 depuis longtemps, que $i = -E/2R$ puis que $u_C = 2E + Ri = 3E/2$. Il faut pour cela attendre un temps long devant les constantes de temps des deux dipôles RC et LR, soit :RC et L/R.

2. Une fois l'interrupteur placé en position 2, les branches contenant des générateurs sont déconnectées et on a un simple dipôle LC. La loi des mailles donne :

$$u_C = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \to \frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{u_C}{LC} = 0.$$

La solution est donc l'unique fonction sinusoïdale de pulsation $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ vérifiant les conditions initiales $u_C(0) = 3E/2$ et $\dot{u_C}(0) = i_C(0)/C = -\frac{E}{2RC}$, soit :

$$u_C = u_C(0)\cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{u_C}(0)}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) = \frac{3E}{2}\cos(\omega_0 t) - \frac{E}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}\sin(\omega_0 t)$$
$$= \frac{E}{2}\left(3\cos(\omega_0 t) + \frac{\sqrt{L/C}}{R}\cos(\omega_0 t + \pi/2)\right) = U_{cm}\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

avec :

$$U_m = \frac{E}{2}\sqrt{9 + \frac{L}{R^2 C}} \qquad \text{et : } \varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{L/C}}{3R}\right),$$

avec une construction de Fresnel. On aura donc $U_m = 13\,\mathrm{V}$ pour $L = 9R^2C\left((2U_m/E)^2 - 1\right) = 26\,\mathrm{mH}$. Le maximum $u_C = U_m$ sera alors atteint pour :

$$\omega_0 t + \varphi = 0 \mod 2\pi \to t = -\frac{\varphi}{\omega_0} + k\frac{2\pi}{\omega_0} \text{avec : } k \in \mathbb{N}^\star.$$

Le premier instant correspond à $k = 1$ et donne $t_1 = 1{,}3\cdot10^{-4}\,\mathrm{s}$, les autres seront distants de $2\pi/\omega_0 = 1{,}4\cdot10^{-4}\,\mathrm{s}$.

Correction de l'exercice 3

En choisissant l'origine des temps à l'instant où l'élongation est maximale, et en notant $\Delta l_{\max}$ sa valeur et T la période, l'élongation $\Delta l(t)$ s'écrit à chaque instant : $\Delta l = \Delta l_{\max}\cos(2\pi t/T)$ et la vitesse du point matériel est : $\dot{\Delta l} = -2\pi\Delta l_{\max}\sin(2\pi t/T)/T$.

- La force de tension est dirigée vers l'extrémité fixe du ressort, elle est maximale. Le vecteur vitesse est nul.
- Un quart de période plus tard, en $t = T/4$ l'élongation du ressort est nulle, la force de tension est donc nulle. La vitesse est en revanche maximale, dirigée vers l'extrémité fixe, et a pour norme $|\dot{\Delta l}| = 2\pi\Delta l_{\max}/T$.
- Une demi-période plus tard, en $t = T/2$, la force de tension est de nouveau maximale en norme mais dirigée dans l'autre sens. Le vecteur vitesse est nul.

Correction de l'exercice 4

1. L'élongation maximale sera Δl dans tous les cas. En revanche la vitesse maximale étant égale à $\omega\Delta l$ et $\omega = \sqrt{k/m}$ diminuant quand on augmente la masse, la vitesse maximale sera plus faible pour une masse plus grande.

2. Il suffit de s'attacher à une extrémité d'un ressort dont on connaît la raideur et de fixer l'autre extrémité à un objet de masse beaucoup plus importante (la cloison de la station spatiale). La mesure de la fréquence des oscillations permettra de remonter à la masse.

3. Bien qu'on n'ait pas un ressort en mouvement unidimensionnel, on peut tirer les mêmes conclusions qualitatives. La fréquence varie en $\sqrt{k/m}$, elle augmente quand la masse diminue, *ie* quand c'est un enfant qui utilise la bascule. Les oscillations avec un adulte seront plus lentes.

Correction de l'exercice 5

1. (a) Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}^2\Delta\ell}{\mathrm{d}t^2} = -k(\ell-\ell_0) = -k\Delta\ell.$$

Les solutions sont $\Delta\ell = A\left(\omega t+\varphi\right)$, avec $\omega = \sqrt{k/m}$. L'unique solution vérifiant $\Delta\ell(t=0) = \Delta\ell_0$ et $\dot{\Delta\ell}(t=0) = 0$ est :

$$\Delta\ell = \Delta\ell_0\cos(\omega t).$$

(b) On calcule alors : $\dot{\ell} = \dot{\Delta\ell} = -\omega\sin(\omega t)$; soit, puisque $m\omega^2 = k$:

$$\mathscr{E}_{\text{pot}} = \frac{k\Delta\ell^2}{2} = \frac{k\Delta\ell_0^2}{2}\cos^2(\omega t) \quad \mathscr{E}_{\text{cin}} = \frac{m\dot{\Delta\ell}^2}{2} = \frac{k\Delta\ell_0^2}{2}\sin^2(\omega t)$$
$$\to \mathscr{E}_{\text{m}} = \mathscr{E}_{\text{pot}} + \mathscr{E}_{\text{cin}} = \frac{k\Delta\ell_0^2}{2} = \text{cste}.$$

Quand la longueur du ressort est minimale la vitesse est nécessairement nulle. On a donc alors $\mathscr{E}_{\text{cin}} = 0$ *ie* $\mathscr{E}_{\text{pot}} = \mathscr{E}_{\text{m}}$ soit $|\Delta\ell| = \Delta\ell_0$. Pour que ℓ soit minimale, on aura donc $\Delta\ell = -\Delta\ell_0$ *ie* $\ell = \ell_0 - \Delta\ell_0$.

Le signe de $\Delta\ell_0 - mg/k$ pouvant être quelconque, l'expression de la longueur minimale la plus générale est :

$$\ell_{\min} = \ell_0 + \frac{mg}{k} - \left|\Delta\ell_0 - \frac{mg}{k}\right|.$$

2. (a) On doit maintenant rajouter le poids au bilan des forces. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit désormais :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} = mg - k\left(\ell-\ell_0\right). \to \ddot{\ell} + \omega^2\left(\Delta\ell - \frac{mg}{k}\right) = 0$$

L'unique solution vérifiant les conditions initiales est :

$$\Delta\ell = \frac{mg}{k} + \left(\Delta\ell_0 - \frac{mg}{k}\right)\cos\left(\omega t\right).$$

(b) On calcule alors :

$$\mathscr{E}_{\text{cin}} = \frac{m\omega^2\left(\Delta\ell_0 - \frac{mg}{k}\right)^2}{2}\sin\left(\omega t\right)^2$$

On doit prendre en compte l'énergie potentielle du système masse-ressort $k\Delta\ell^2/2$ mais aussi l'énergie potentielle de pesanteur $mgz = -mg\ell$ car le paramètre ℓ est dirigé selon l'axe *décroissant*. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_{\text{pot}} = \frac{k\Delta\ell^2}{2} - mg\ell &= \frac{(mg)^2}{2k} + \frac{k(\Delta\ell_0 - mg/k)^2}{2}\cos\left(\omega t\right)^2 + mg\left(\Delta\ell_0 - \frac{mg}{k}\right)\cos\left(\omega t\right)\\
&\quad - mg\left(\ell_0 + \frac{mg}{k} + \left(\Delta\ell_0 - \frac{mg}{k}\right)\cos(\omega t)\right)\\
&= \frac{(mg)^2}{2k} + \frac{k(\Delta\ell_0 - mg/k)^2}{2}\cos\left(\omega t\right)^2 - mg\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right)\\
\to \mathscr{E}_{\text{m}} = \mathscr{E}_{\text{cin}} + \mathscr{E}_{\text{pot}} &= \frac{(mg)^2}{2k} + \frac{k(\Delta\ell_0 - mg/k)^2}{2} - mg\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right) = \frac{k\Delta\ell_0^2}{2} - mg\left(\ell_0 + \Delta\ell_0\right)\\
&= \text{cste}.
\end{aligned}$$

Notons qu'on aurait pu directement calculer la valeur de cette constante en exprimant l'énergie mécanique à l'instant initial où la longueur est $\ell_0 + \Delta\ell_0$ et où l'élongation est $\Delta\ell_0$.

De nouveau la longueur ℓ sera extrêmale quand $\mathscr{E}_{\text{cin}} = \mathscr{E}_{\text{m}}$, *ie* :

$$-mg\ell + \frac{k(\ell-\ell_0)^2}{2} = \frac{k\Delta\ell_0^2}{2} - mg\left(\ell_0 + \Delta\ell_0\right).$$

Il s'agit d'un polynôme de degré 2 dont la plus petite racine est, après calculs et simplifications :

$$\ell_{\min} = \ell_0 + \frac{mg}{k} - \left|\Delta\ell_0 - \frac{mg}{k}\right|.$$

On retrouve bien l'expression précédente.

Correction de l'exercice 6

Dans tous les cas, la pulsation est $\omega = \sqrt{k/l}$. On note $\vec{e_x}$ le vecteur unitaire dirigé par $\overrightarrow{AM_0}$.

- La force de tension a pour expression $\vec{T} = -k(x - l_0)\vec{e_x}$, l'équation différentielle d'évolution de x est donc :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - l_0) \quad \text{de solution : } x = -\Delta l_0 \cos(\omega t) + l_0$$

- On a maintenant $\vec{T} = -kx\vec{e_x}$, l'équation différentielle est :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{de solution : } x = \Delta l_0 \cos(\omega t) - \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t).$$

- Cette fois-ci : $\vec{T} = -k(x - \Delta l_0)$, soit :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - \Delta l_0) \quad \text{de solution : } x = \Delta l_0(1 - \cos(\omega t)).$$

Correction de l'exercice 7

- À l'équilibre, la somme des forces appliquées (son poids en la force de tension du ressort) au point matériel dans le référentiel terrestre galiléen est nulle : on a donc $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$, soit $m\vec{g} - k(\Delta l_{eq})\vec{e}_z$, avec Δl_{eq} la longueur du ressort à l'équilibre. On détermine ainsi $k = mg/\Delta l_{eq} = 39{,}2\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.
- La période est $2\pi\sqrt{m/k} = 0{,}45\,\mathrm{s}$, soit $f = 1/T = 2{,}2\,\mathrm{Hz}$.
- L'écart $z(t)$ par rapport à l'équilibre (avec z orienté selon la normale ascendante) est de la forme : $z(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, avec $\omega = \sqrt{k/m}$. Les conditions initiales étant $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = v_0$, la solution est $z(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$.
- En notant $\Delta z = 2\,\mathrm{cm}$ la hauteur dont remonte la bille avant de redescendre, l'amplitude du mouvement v_0/ω est évidemment égale à Δz. On calcule donc : $v_0 = \omega\Delta z = 2{,}8\cdot 10^{-1}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

  Remarque : On peut également vérifier la conservation de l'énergie mécanique entre l'instant initial et l'extension maximale. En choisissant l'origine des énergies potentielle de pesanteur à la position initiale, on a :

$$t = 0 : \mathscr{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2$$
$$t = \frac{\pi}{4}\mathscr{E}_m = 0 + mg\Delta z + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k} - \Delta z\right)^2$$

en n'oubliant pas de tenir compte de la variation d'énergie potentielle de pesanteur. Avec l'expression de $v_0 = \sqrt{k/m}\Delta z$, on vérifie que ces deux expressions sont bien égales.

Correction de l'exercice 8

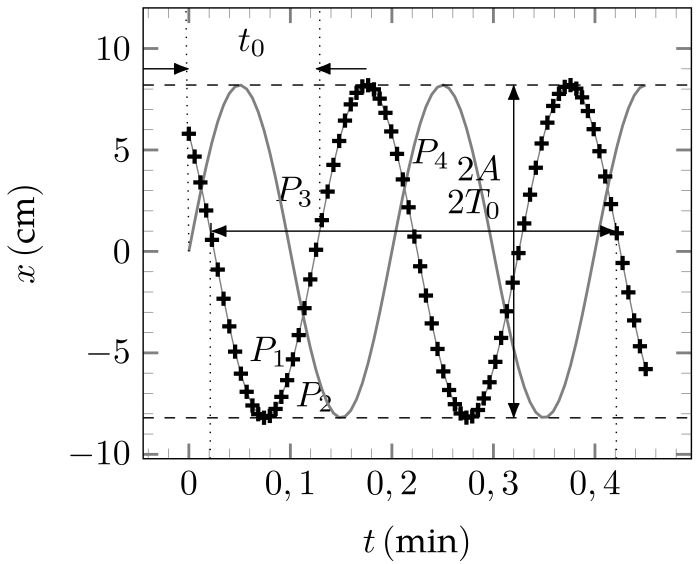


Fig. 1

1.
   - On mesure, sur la figure1, $2T_0 = 0{,}42 - 0{,}02 = 0{,}40\,\mathrm{min}$, soit $T_0 = 0{,}20\,\mathrm{min}$ et $f_0 = \frac{1}{T_0} = 8{,}3\cdot 10^{-2}\,\mathrm{Hz}$.
   - On lit également $2A = 8{,}0 - (-8{,}0) = 16{,}0\,\mathrm{cm}$, soit $A = 8{,}0\,\mathrm{cm}$.
   - Dans l'expression de $x(t)$, la phase φ représente l'avance de $x(t)$ par rapport à un sinus pour lequel cette phase est nulle. Le premier passage par flanc montant de la courbe étant en $t_0 = 0{,}125\,\mathrm{min}$, le *retard* est $2\pi t_0/T = 3{,}9\,\mathrm{rad} = 225°$. L'*avance* est donc $-225° \mod 360 = 135° \mod 360$.
2. La vitesse $\dot{x}$ est positive en P_2 et P_3, négative ailleurs. L'accélération $\ddot{x}$ est négative en P_3 et P_4, positive ailleurs.
3. On calcule $k = 4\pi^2 m f_0^2 = 3{,}3\cdot 10^{-2}\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.

Correction de l'exercice 9

Dans les deux cas, on désigne par T_i ($i = 1,2$) la tension du ressort i et $\overrightarrow{\Delta l_i}$ son élongation.

1. Dans l'association série le principe des actions réciproques assure que chaque ressort exerce une force de même intensité sur l'autre : les deux tensions ont la même tension qu'on notera T. On en déduit les élongations $\overrightarrow{\Delta l}_1 = -\overrightarrow{T}/k_1$ et $\overrightarrow{\Delta l}_2 = -\overrightarrow{T}/k_2$. L'élongation totale $\overrightarrow{\Delta l}$ est, quant à elle, la somme des élongations : $\overrightarrow{\Delta l}_1 + \overrightarrow{\Delta l}_2 = \overrightarrow{\Delta l}$. On en déduit : $\overrightarrow{\Delta l} = -(1/k_1 + 1/k_2)\overrightarrow{T}$. On retrouve bien la caractéristique d'un ressort de raideur k telle que $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.
2. Dans l'association parallèle, c'est l'élongation qui est la même pour les deux ressorts (on la note $\overrightarrow{\Delta l}$), et le point matériel est soumis la somme des deux tensions. En notant $\overrightarrow{T}$ cette somme, on a $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{T}_1 + \overrightarrow{T}_2 = -\left(k_1\overrightarrow{\Delta l}_1 + k_2\overrightarrow{\Delta l}_2\right) = -(k_1+k_2)\overrightarrow{\Delta l}$: la raideur k est maintenant la somme des raideurs.

Correction de l'exercice 10

Horizontaux

1. Dans $\mathscr{R}_T$ galiléen, le point matériel est soumis à la réaction $\overrightarrow{R}$ du support normale à $\overrightarrow{e}_x$ (mouvement sans frottement), à son poids lui aussi normal à $\overrightarrow{e}_x$ et aux forces de rappel élastique exercées par les deux ressorts : $\begin{cases}\overrightarrow{T}_A = -k\left(\overrightarrow{AM} - l_0\,\overrightarrow{u}_{AM}\right) = -k(x + l_0 - l_0)\,\overrightarrow{e}_x = -kx\,\overrightarrow{e}_x\\ \overrightarrow{T}_B = -k(\overrightarrow{BM} - l_0\,\overrightarrow{u}_{BM}) = -k(-l_0 + x + l_0)\,\overrightarrow{e}_x = -kx\,\overrightarrow{e}_x\end{cases}$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit, en projection sur $\overrightarrow{e}_x$: $m\ddot{x} = -2kx$: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, avec $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$.
2. On a immédiatement : $x = x_0\cos(\omega_0 t)$.
3. La tension d'un ressort idéal étant uniforme, la force en A (resp. en B) est simplement l'opposée de la tension exercée par le ressort de gauche (resp. de droite). On a $\overrightarrow{F}_A = kx\,\overrightarrow{e}_x$ et $\overrightarrow{F}_B = kx\,\overrightarrow{e}_x$. Elles sont maximales en norme quand l'élongation du ressort est maximale, soit quand $|x| = x_0$, soit encore pour $\omega t = 0\,[\pi]$.
4. On vérifie que
$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x)^2 + \frac{1}{2}k(-x)^2,$$
est bien une constante en utilisant le fait que $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

Verticaux

1. Le point matériel est soumis à :
   - $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{e}_z$
   - $\overrightarrow{F}_A = -k(\overrightarrow{AM} - l_0\,\overrightarrow{u}_{AM})\,\overrightarrow{e}_z = k(l_1 - l_0)\,\overrightarrow{e}_z$
   - $\overrightarrow{F}_B = -k(\overrightarrow{BM} - l_0\,\overrightarrow{u}_{BM}) = -k(l_2 - l_0)\,\overrightarrow{e}_z$

   À l'équilibre, on a donc : $k(l_1 - l_2) = mg$. Comme $(l_1 + l_2) = 2a$, on obtient :
$$l_1 = a + mg/(2k) \quad \text{et} \quad l_2 = a - mg/(2k).$$
2. Comme on l'a vu en cours, le fait de rendre l'oscillateur vertical ne change pas sa pulsation, seule la position d'équilibre est modifiée. On a donc toujours une pulsation égale à $\omega = \sqrt{2k/m}$. On a :
$$\ddot{z} + \omega^2(z - z_{\text{eq}}) = 0, \text{avec : } z_{\text{eq}} = -\frac{mg}{2k}.$$
3. Les conditions initiales $z = 0$ et $\overrightarrow{v} = v_0\,\overrightarrow{e}_z$ assurent que :
$$z = z_{\text{eq}}\,(1 - \cos(\omega t)) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t).$$

Correction de l'exercice 11

On détermine les expressions des coordonnées et des vecteurs de base dans les deux systèmes. On a :

$$\begin{aligned}
X &= x\cos(\alpha) + z\sin(\alpha) & Z &= z\cos(\alpha) - x\sin(\alpha)\\
x &= X\cos(\alpha) - Z\sin(\alpha) & z &= Z\cos(\alpha) + X\sin(\alpha)\\
\overrightarrow{e_X} &= \overrightarrow{e_x}\cos(\alpha) + \overrightarrow{e_z}\sin(\alpha) & \overrightarrow{e_Z} &= \overrightarrow{e_z}\cos(\alpha) - \overrightarrow{e_x}\sin(\alpha)\\
\overrightarrow{e_x} &= \overrightarrow{e_X}\cos(\alpha) - \overrightarrow{e_Z}\sin(\alpha) & \overrightarrow{e_z} &= \overrightarrow{e_Z}\cos(\alpha) + \overrightarrow{e_X}\sin(\alpha)
\end{aligned}$$

On en déduit les expressions des forces dans les deux systèmes de coordonnées

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P} &= -mg\overrightarrow{e_z} = -mg(\cos(\alpha)\overrightarrow{e_Z} + \sin(\alpha)\overrightarrow{e_X})\\
\overrightarrow{T} &= -k(X - l_0)\overrightarrow{e_X} = -k\left[x\cos(\alpha) + z\sin(\alpha) - l_0\right]\left[x\cos(\alpha)\overrightarrow{e_x} + \sin(\alpha)\overrightarrow{e_z}\right],
\end{aligned}$$

On a toujours : $m\overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{T} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N}$, avec $\overrightarrow{N}$ la réaction du support, qui n'a pas de composante selon $\overrightarrow{e_X}$ en l'absence de frottement.

1. En coordonnées X, Z, on a :
$$m\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} = -k(X - l_0) - mg\sin(\alpha) \qquad 0 = m\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}t^2} = -mg\cos(\alpha) + N_Z$$
Les conditions initiales étant $X(t=0) = l_0 + \Delta l_0$ et $\dot{X}(t=0) = 0$, la solution est :
$$X = l_0 - \frac{mg\sin(\alpha)}{k} + \left(\Delta l_0 + \frac{mg\sin(\alpha)}{k}\right)\cos(\omega t) \qquad Z = 0.$$

2. La méthode la plus simple pour déterminer x et z consiste à utiliser leur expression en fonction de X et Z. On obtient :

$$x = X\cos(\alpha) \quad z = X\sin(\alpha).$$

On vérifie facilement la vraisemblance de ces expressions dans les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi/2$.

Correction de l'exercice 12

1. L'équilibre du ressort 1 est atteint pour $-k(x_1 - l_0) + k'(x_2 - x_1 - l_0) = 0$, celui du ressort 2 pour $k(L - x_2 - l_0) - k'(x_2 - x_1 - l_0) = 0$. On résout ce système linéaire en effectuant la somme et la différence de ces équations.

$$\begin{cases} -k(x_1 - l_0) + k'(x_2 - x_1 - l_0) &= 0 \\ k(L - x_2 - l_0) - k'(x_2 - x_1 - l_0) &= 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 &= L \\ (2k' + k)(x_1 - x_2) &= -k(L - 2l_0) - 2k' l_0 \end{cases}$$

$$\text{soit} \quad \begin{cases} x_s = x_1 + x_2 &= L \\ x_a = x_1 - x_2 &= -L\frac{1-2\beta(1-\alpha)}{1+2\alpha} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \beta &= l_0/L \\ \alpha &= k'/k \end{cases}$$

$$\text{et donc} \quad \begin{cases} x_1^{eq} &= \frac{L}{2}\left(1 - \frac{1-2\beta(1-\alpha)}{1+2\alpha}\right) \\ x_2^{eq} &= \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1-2\beta(1-\alpha)}{1+2\alpha}\right) \end{cases}$$

2. On effectue les mêmes sommes et différences sur les équations du mouvement :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 &= -k(x_1 - l_0) + k'(x_2 - x_1 - l_0) \\ m\ddot{x}_2 &= k(L - x_2 - l_0) - k'(x_2 - x_1 - l_0) \end{cases} \begin{cases} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= k(L - x_1 - x_2) \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) &= -k(L + (x_1 - x_2)) - 2k'(x_1 - x_2) + 2kl_0 \end{cases}$$

Pour faire apparaître les positions d'équilibre, on peut « soustraire » à la première équation la condition d'équilibre : $0 = k\left(L - (x_1^{eq} + x_2^{eq})\right)$ et à la seconde : $0 = -k(L - 2l_0) - (2k' + k)(x_1^{eq} - x_2^{eq})$. On obtient :

$$\begin{cases} m(\ddot{X}_1 + \ddot{X}_2) + k(X_1 + X_2) &= 0 \\ m(\ddot{X}_1 - \ddot{X}_2) + (2k' + k)(X_1 - X_2) &= 0 \end{cases}$$

3. On a immédiatement :

$$\begin{cases} \ddot{X}_s + \omega_s^2 X_s &= 0 \\ \ddot{X}_a + \omega_a^2 X_a &= 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_s^2 &= k/m \\ \omega_a^2 &= (2k' + k)/m \end{cases}$$

4. On a découplé les équations sur X_1 et X_2 pour obtenir des équations d'oscillateurs harmoniques sur leurs combinaisons symétrique (X_s) et antisymétrique (X_a). Ces deux grandeurs oscillent donc sinusoïdalement. On a alors $X_s = X_s^0\cos(\omega_s t + \varphi_s)$ et $X_a = X_a^0\cos(\omega_a t + \varphi_a)$. On obtient alors :

$$\begin{cases} X_2(t) &= (X_s - X_a)/2 = \frac{X_s^0\cos(\omega_s t + \varphi_s) - X_a^0\cos(\omega_a t + \varphi_a)}{2} \\ X_1(t) &= (X_s + X_a)/2 = \frac{X_s^0\cos(\omega_s t + \varphi_s) + X_a^0\cos(\omega_a t + \varphi_a)}{2} \end{cases}$$

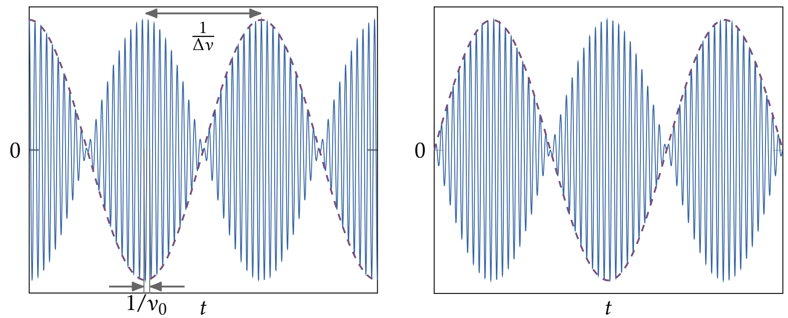
Les conditions initiales sont ici $x_1 = x_0$, $\dot{x}_1(0) = 0$ et $x_2 = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$, soit $X_s(0) = x_0$, $X_a(0) = x_0$ et $\dot{X}_s(0) = \dot{X}_a(0) = 0$. Les expressions de x_1 et x_2 sont alors :

$$\begin{cases} X_1(t) &= \frac{x_0}{2}(\cos(\omega_s t) + \cos(\omega_a t)) = x_0\cos(\frac{\omega_s - \omega_a}{2}t)\cos(\frac{\omega_a + \omega_s}{2}t) \\ X_2(t) &= \frac{x_0}{2}(\cos(\omega_s t) - \cos(\omega_a t)) = x_0\sin(\frac{\omega_a - \omega_s}{2}t)\ \sin(\frac{\omega_a + \omega_s}{2}t) \end{cases}$$

5. (a) Dans le cas $k' \ll k$, *ie* $\alpha \ll 1$ les différences et sommes de ω_s et ω_a se simplifient, en posant $\omega_0 = \omega_s$ pour donner :
$$\begin{cases} \omega_s + \omega_a &= \omega_0(\sqrt{1+2\alpha} + 1) \simeq 2\omega_0 \\ \omega_a + \omega_s &= \omega_0(\sqrt{1+2\alpha} - 1) \simeq \omega_0(1 + 2\alpha/2 - 1) = \alpha\omega_0 \end{cases}$$

   (b) Les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deviennent alors : $\begin{cases} x_1(t) &= x_0\cos(\omega_0 t)\ \cos\frac{\alpha\omega_0 t}{2} \\ x_2(t) &= x_0\sin(\omega_0 t)\ \sin\frac{\alpha\omega_0 t}{2} \end{cases}$.

   Chacune de ces expressions fait intervenir un terme oscillant rapidement, à ω_0 dont l'amplitude est modulée, également de manière sinusoïdale mais beaucoup plus lentement, avec la pulsation $\alpha\omega_0/2$. C'est ce qu'on nomme un phénomène de *battements*. L'allure de cette fonction est représentée sur la figure ci-dessous, pour $\alpha = 0,05$.



   (c) L'énergie totale du système est la somme :

- de l'énergie cinétique de chacun des oscillateurs : $E_{ci} = m\dot{x}_i^2/2$,
- de l'énergie potentielle des trois ressorts : $k(x_1 - l_0)^2/2 + k(x_1 - l_0)^2/2 + k'(x_2 - x_1 - l_0)^2/2$.

La condition $\alpha \ll 1$ permet de faire quelques simplifications. Tout d'abord, on peut négliger l'énergie potentielle due au ressort de couplage. L'énergie potentielle totale se réécrit alors :

$$E_\mathrm{p} = k(X_1 + x_1^\mathrm{eq} - l_0)^2/2 + k(L - (X_2 + x_2^\mathrm{eq}) - l_0)^2/2 \simeq k(X_1^2 + X_2^2)/2,$$

car les positions d'équilibre sont $x_1^\mathrm{eq} = l_0$ et $x_2^\mathrm{eq} = L - l_0$ pour $\alpha \to 0$.
La vitesse vaut quant à elle : $\dot{x}_1 = -x_0\omega_0\left(\sin(\omega_0 t)\cos\frac{\alpha\omega_0 t}{2} + \frac{\alpha}{2}\cos(\omega_0 t)\sin\frac{\alpha\omega_0 t}{2}\right)$.
On a donc :

$$\begin{aligned}Ec_1 = \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2}\Bigg(&\sin^2(\omega_0 t)\cos^2\left(\frac{\alpha\omega_0 t}{2} + \alpha\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\sin\left(\frac{\alpha\omega_0 t}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\omega_0 t}{2}\right)\right)\\ &+ \frac{\alpha^2}{4}\sin^2\left(\frac{\alpha\omega_0 t}{2}\right)\cos^2(\omega_0 t)\Bigg).\end{aligned}$$

On peut ensuite prendre la moyenne de cette expression et de l'énergie potentielle sur une pseudo-période $T_0 = 2\pi/\omega_0$ pendant laquelle les termes oscillant à $\alpha\omega_0/2$ sont pratiquement constants. On obtient[i] alors :

$$\begin{aligned}
&< E_{c1} >_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} E_{c1}(t')\mathrm{d}t' = \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2}\left(\frac{\cos^2(\alpha\omega_0 t/2)}{2} + \frac{\alpha^2\sin^2(\alpha\omega_0 t/2)}{8}\right)\\
&< E_{p1} >_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} E_{p1}(t')\mathrm{d}t' = \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2}\ \frac{\cos^2(\alpha\omega_0 t/2)}{2}\\
&\to < E_{m1} >_{T_0}(t) = \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2}\left(\cos^2(\alpha\omega_0 t/2) + \frac{\alpha^2\sin^2(\alpha\omega_0 t/2)}{8}\right) \simeq \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha\omega_0 t}{2}\right)\\
&\text{et} < E_{m2} >_{T_0}(t) = \simeq \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2}\sin^2(\alpha\omega_0 t/2)
\end{aligned}$$

L'énergie mécanique moyenne (par pseudo-période) de chaque oscillateur oscille donc à $2\alpha\omega_0/2 = \alpha\omega_0$, elle se répartit successivement d'un oscillateur à l'autre. L'observation de la fréquence $\alpha\omega_0$ du battement de l'énergie donne accès à la différence des fréquences (proches) des deux oscillations qui le composent.

[i] Les valeurs moyennes obtenues ici dépendent du temps car la fonction n'est que pseudo-périodique de période T_0 : il reste la dépendance lente en temps due aux termes en $\alpha\omega_0/2$.